Outils pour la physique

# TP : Mesures et incertitudes

## Sommaire


**I. Contexte** . . . . . **1**
**II. Généralités sur les incertitudes** . . . . . **1**
II.1. Vocabulaire de métrologie . . . . . 1
II.2. Chiffres significatifs . . . . . 2
II.3. Présentation d'un résultat . . . . . 2
II.4. Compatibilité d'une mesure . . . . . 3
**III. Évaluation d'une incertitude à partir d'une série de mesure** . . . . . **3**
III.1. Moyenne et incertitude-type . . . . . 3
III.2. Réalisation d'une étude statistique . . . . . 3
**IV. Évaluation d'une incertitude à partir d'une mesure unique** . . . . . **4**
IV.1. Incertitude-type donnée par un instrument de mesure . . . . . 4
IV.2. Composition des incertitudes . . . . . 5
IV.3. Simulation Monte-Carlo . . . . . 5
**V. Régression linéaire** . . . . . **6**
V.1. Principe . . . . . 6
V.2. Validation d'un modèle linéaire . . . . . 6
V.3. Linéarisation d'un modèle non-linéaire . . . . . 7
V.4. Détermination des incertitudes-types sur les paramètres . . . . . 7


# I. Contexte

Un étudiant souhaite mesurer la célérité des ultrasons dans l'air à 20°C. Pour cela, il mesure qu'une salve ultrasonore émise par un émetteur met un temps $T = 1{,}17\,\text{ms}$ pour parcourir la distance $d = 400\,\text{mm}$ jusqu'à un récepteur. Il en déduit alors une valeur pour la célérité :

$$c_{\text{exp}} = \frac{d}{T} = 342\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

qui diffère légèrement de la valeur tabulée $c = 340{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Comme une mesure n'est jamais « parfaite », il doit estimer une incertitude-type $u(c_{\text{exp}})$ associée à sa mesure, afin de vérifier si celle-ci est compatible avec la valeur tabulée. Nous allons ainsi présenter différentes façons d'estimer cette incertitude-type.

# II. Généralités sur les incertitudes

## II.1. Vocabulaire de métrologie

Le **mesurande** est la grandeur physique que l'on souhaite mesurer.

La **valeur vraie** du mesurande est sa valeur exacte, c'est-à-dire la valeur que l'on obtiendrait si la mesure était parfaite.

L'**erreur de mesure** est la différence entre la valeur mesurée et la valeur vraie.

L'**incertitude-type relative** est le rapport de l'incertitude-type sur la valeur mesurée, elle s'exprime en pourcentage.

L'**écart normalisé**, aussi appelé **z-score**, est le rapport de l'erreur de mesure sur l'incertitude-type.

**Application :**

> Pour la mesure de la célérité des ultrasons dans l'air, exprimons le mesurande, la valeur vraie, l'erreur de mesure, l'incertitude-type relative et l'écart normalisé.

- Mesurande : célérité des ultrasons dans l'air
- Valeur vraie : $c = 340{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
- Erreur de mesure : $|c_{\mathrm{exp}} - c|$
- Incertitude-type relative : $\dfrac{u(c_{\mathrm{exp}})}{c_{\mathrm{exp}}}$
- Écart normalisé : $E_{\mathrm{N}} = \dfrac{|c_{\mathrm{exp}} - c|}{u(c_{\mathrm{exp}})}$

## II.2. Chiffres significatifs

Le nombre de **chiffres significatifs** d'un résultat est le nombre de chiffres qui le compose lorsqu'il est écrit en notation scientifique, c'est-à-dire avec une puissance de dix. Attention, un zéro à la fin d'un résultat est également un chiffre significatif.

Le résultat d'un calcul doit comporter le même niveau d'incertitude que les grandeurs qui le composent :

- pour une multiplication, une division, ou l'utilisation d'une autre fonction (cos, exp...), le résultat s'écrit avec autant de chiffres significatifs que la grandeur qui en a le moins ;
- pour une addition, ou une soustraction, le résultat s'écrit avec autant de décimales significatives que la grandeur qui en a le moins.

**Application :**

Écrivons les résultats de ces opérations avec le nombre de chiffres significatifs adéquats :

- $a = b \times c$ avec $b = 1{,}23$ et $c = 20{,}2$ ;
- $d = e + f$ avec $e = 1{,}23$ et $f = 20{,}2$ ;
- $g = h \times i$ avec $h = 50{,}1$ et $i = 60{,}0$ ;
- $j = k/l$ avec $k = 0{,}1230$ et $l = 3000$.

- On obtient $b \times c = 24{,}846$ donc on écrit : $a = 24{,}8$.
- On obtient $e + f = 21{,}43$ donc on écrit : $d = 21{,}4$.
- On obtient $h \times i = 3006$ donc on écrit : $g = 3{,}01.10^{3}$.
- On obtient $k/l = 0{,}000041$ donc on écrit : $j = 4{,}100.10^{-5}$.

## II.3. Présentation d'un résultat

L'étudiant doit présenter le résultat de sa mesure sous la forme d'un intervalle contenant son incertitude-type :

$$c = c_{\mathrm{exp}} \pm u(c_{\mathrm{exp}}).$$

Par convention :

- l'incertitude-type de l'intervalle doit comporter **deux chiffres significatifs** ;
- le dernier chiffre significatif du résultat doit avoir la même décimale significative que l'incertitude-type.

En effet, comme l'incertitude est une estimation elle-même entachée d'erreurs, il n'est pas nécessaire d'aller au-delà de deux chiffres significatifs (voir d'un seul chiffre significatif selon certaines conventions).

**Application :**

Présentons ces résultats expérimentaux sous la forme d'un intervalle avec le nombre de chiffres significatifs adéquats :

- on mesure $a_{\text{exp}} = 589{,}18\,\text{nm}$ avec $u(a_{\text{exp}}) = 2{,}1\,\text{nm}$ ;
- on mesure $b_{\text{exp}} = 0{,}773\,\text{L}$ avec $u(b_{\text{exp}}) = 0{,}123\,\text{L}$ ;
- on mesure $c_{\text{exp}} = 15\,\text{s}$ avec $u(c_{\text{exp}}) = 0{,}25\,\text{s}$.
- On écrit : $a = (589{,}2 \pm 2{,}1)\,\text{nm}$.
- On écrit : $b = (0{,}77 \pm 0{,}12)\,\text{L}$.
- On écrit : $c = (15{,}00 \pm 0{,}25)\,\text{s}$.

Afin d'éviter de propager des erreurs d'arrondi lors d'un calcul en plusieurs étapes, on garde toujours au brouillon le résultat et son incertitude avec un grand nombre de chiffres significatifs pour pouvoir le réutiliser dans les calculs suivants. Le résultat final doit cependant être présenté avec le nombre de chiffres significatifs adéquats.

### II.4. Compatibilité d'une mesure

Par convention, on considère qu'une valeur mesurée est **compatible** avec une valeur vraie si l'écart normalisé vérifie :

$$\boxed{E_{\text{N}} \leqslant 2}.$$

Dans le cas où $E_{\text{N}} > 2$, il faut essayer d'expliquer les différentes sources d'erreurs possibles : mauvaise manipulation, matériel défectueux, incertitude mal évaluée...

## III. Évaluation d'une incertitude à partir d'une série de mesure

Lorsqu'il est possible de réaliser plusieurs fois la mesure d'une grandeur, on peut évaluer l'incertitude sur le résultat à l'aide d'une étude statistique : il s'agit d'une **évaluation de type A**.

### III.1. Moyenne et incertitude-type

La meilleure estimation de la valeur vraie d'une série $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ de $N$ mesures d'une grandeur est donnée par sa **moyenne** :

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

L'**incertitude-type** associée à **une mesure** est donnée par l'écart-type $\sigma$ de la série :

$$u(x) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$$

elle correspond à la variabilité d'une mesure réalisée.

L'**incertitude-type** associée à **la moyenne** de la série est :

$$u(\overline{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}$$

elle correspond à l'incertitude sur la valeur vraie que l'on souhaite déterminer. Plus le nombre de mesures réalisées sera grand, et plus cette incertitude sera faible.

### III.2. Réalisation d'une étude statistique

Pour qu'une évaluation de type A soit réaliste, on admet qu'il faut :

- disposer d'un nombre suffisant de mesures (au moins 5) ;
- que ces mesures présentent une certaine dispersion (car le calcul d'un écart-type n'a pas de sens si on obtient toujours la même valeur).

**Application :**

En supposant que l'étudiant peut répéter plusieurs fois sa mesure de la célérité des ultrasons, il obtient les résultats suivants :

| | Mesure n°1 | Mesure n°2 | Mesure n°3 | Mesure n°4 | Mesure n°5 | Mesure n°6 | Mesure n°7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{\text{exp}}$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) | 342 | 343 | 339 | 343 | 336 | 340 | 338 |

En utilisant les bibliothèques `numpy as np` et `matplotlib.pyplot as plt`, écrivons un programme Python permettant :

- d'afficher ces mesures sous la forme d'un histogramme avec la fonction `plt.hist(...)` ;
- de calculer la moyenne de ces mesures avec la fonction `np.mean(...)` ;
- de calculer l'incertitude-type associée à une mesure avec la fonction `np.std(...,ddof=1)` ;
- de calculer l'incertitude-type associée à la moyenne ;

puis présentons le résultat de cette étude statistique sous la forme d'un intervalle, afin de conclure sur sa compatibilité avec la valeur tabulée.

On présente le résultat : $c = \overline{c}_{\text{exp}} \pm u(\overline{c}_{\text{exp}}) = (340{,}1 \pm 1{,}0)\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

On calcule l'écart normalisé : $E_{\text{N}} = \dfrac{|\overline{c}_{\text{exp}} - c|}{u(\overline{c}_{\text{exp}})} = 0{,}14 \leqslant 2$, ces mesures sont donc compatibles avec la valeur tabulée.

# IV. Évaluation d'une incertitude à partir d'une mesure unique

Lorsqu'il n'est pas possible de réaliser une étude statistique, il faut évaluer l'incertitude sur le résultat à partir d'une mesure unique : il s'agit d'une **évaluation de type B**.

## IV.1. Incertitude-type donnée par un instrument de mesure

La notice de certains instruments de mesure précisent l'incertitude-type à prendre en compte lors de leurs utilisations.

Lorsque ce n'est pas le cas, on peut néanmoins estimer l'incertitude-type d'une mesure en considérant une distribution de probabilité normale. Si un instrument indique qu'une grandeur $x$ à mesurer est contenue dans un intervalle $[x - \Delta, x + \Delta]$, avec $\Delta$ la demi-étendue de l'intervalle, alors on peut montrer que son incertitude-type est :

$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}.$$

**Application :**

En supposant que l'étudiant ne peut pas réaliser une étude statistique :

- il mesure la distance $d$ entre l'émetteur et le récepteur ultrasonore à l'aide d'un mètre, et estime que cette distance est contenue dans l'intervalle : $395\,\text{mm} < d < 405\,\text{mm}$ ;
- il mesure à l'oscilloscope un temps $T$ qu'il estime contenu dans l'intervalle : $1{,}16\,\text{ms} < T < 1{,}18\,\text{ms}$.

Déterminons les incertitudes-types associées à ces mesures.

- Pour la distance $d$, la demi-étendue est : $\Delta_d = 5\,\text{mm}$, d'où : $u(d) = 2{,}9\,\text{mm}$.
- Pour le temps $T$, la demi-étendue est : $\Delta_T = 0{,}01\,\text{ms}$, d'où : $u(T) = 0{,}0058\,\text{ms}$.

## IV.2. Composition des incertitudes

Considérons une grandeur $y$ qui s'exprime en fonction de plusieurs grandeurs $\{x_1, x_2...\}$. L'incertitude-type composée sur la mesure de $y$ peut alors s'exprimer en fonction des incertitudes-types sur ces grandeurs grâce à une formule de composition.

Cette formule de composition des incertitudes pouvant être assez complexe, nous allons nous limiter seulement à quelques cas particuliers :

- dans le cas d'une multiplication par une constante, soit $y = k\,x_1$ avec $k$ une constante, on obtient :

$$u(y) = |k|\,u(x_1)$$

- dans le cas d'une somme ou d'une différence, soit $y = x_1 + x_2$ ou $y = x_1 - x_2$, on obtient :

$$u(y) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}$$

- dans le cas d'un produit ou d'un quotient, soit $y = x_1 \times x_2$ ou $y = \dfrac{x_1}{x_2}$, on obtient :

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}.$$

**Application :**

> Déterminons l'incertitude-type composée sur la célérité des ultrasons à partir des précédentes incertitudes-types associées aux mesures de $d$ et $T$.
>
> Comme $c_{\text{exp}} = \dfrac{d}{T}$, l'incertitude-type composée est :
>
> $$u(c_{\text{exp}}) = c_{\text{exp}} \sqrt{\left(\frac{u(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{u(T)}{T}\right)^2} = 3{,}0\,\text{m·s}^{-1}.$$

## IV.3. Simulation Monte-Carlo

Pour une estimation plus poussée de l'incertitude-type d'une grandeur $y$ qui s'exprime en fonction de plusieurs grandeurs $\{x_1, x_2...\}$, ou si la formule de composition des incertitudes est trop complexe à obtenir, on peut réaliser une **simulation Monte-Carlo**, dont l'algorithme se présente sous la forme suivante :

- on définit un nombre $N$ d'expériences à simuler ;
- on créé une liste vide qui contiendra les grandeurs $y$ obtenues lors des expériences ;
- pour chaque expérience $n$ (avec $1 \leqslant n \leqslant N$), on calcule la grandeur $y$ en prenant :
  - une valeur aléatoire pour $x_1$ qui suit une loi de probabilité de moyenne $\overline{x}_1$ et d'incertitude-type $u(x_1)$
  - une valeur aléatoire pour $x_2$ qui suit une loi de probabilité de moyenne $\overline{x}_2$ et d'incertitude-type $u(x_2)$
  - ...

  puis on l'enregistre dans la liste précédente ;
- on calcule l'écart-type de cette liste, qui correspond à l'incertitude-type $u(y)$.

**Application :**

> En utilisant les bibliothèques `numpy as np` et `matplotlib.pyplot as plt`, écrivons un programme Python permettant :
>
> - de réaliser une simulation Monte-Carlo ($N = 10000$) pour la mesure de la célérité des ondes ultrasonores avec la fonction `np.random.normal(`$\overline{x}$`,`$u(x)$`)` pour le tirage d'une valeur aléatoire qui suit une loi de probabilité gaussienne de moyenne $\overline{x}$ et d'incertitude-type $u(x)$ ;
> - d'afficher les résultats obtenus pour la célérité sous la forme d'un histogramme ;
> - de calculer la moyenne $\overline{c}$ ;
> - de calculer l'incertitude-type $u(c)$ associée à cette mesure ;
>
> puis présentons le résultat obtenu sous la forme d'un intervalle, afin de conclure sur sa compatibilité avec la valeur tabulée.

> On présente le résultat : $c = \overline{c} \pm u(c) = (341{,}9 \pm 3{,}0)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.
>
> On calcule l'écart normalisé : $E_\mathrm{N} = \dfrac{|\overline{c} - c|}{u(c)} = 0{,}64 \leqslant 2$, ces mesures sont donc compatibles avec la valeur tabulée.

# V. Régression linéaire

Afin de vérifier expérimentalement un modèle ou de déterminer un paramètre, il est souvent proposé de réaliser une régression linéaire.

## V.1. Principe

Considérons deux grandeurs expérimentales $x$ et $y$ reliées par la loi affine :

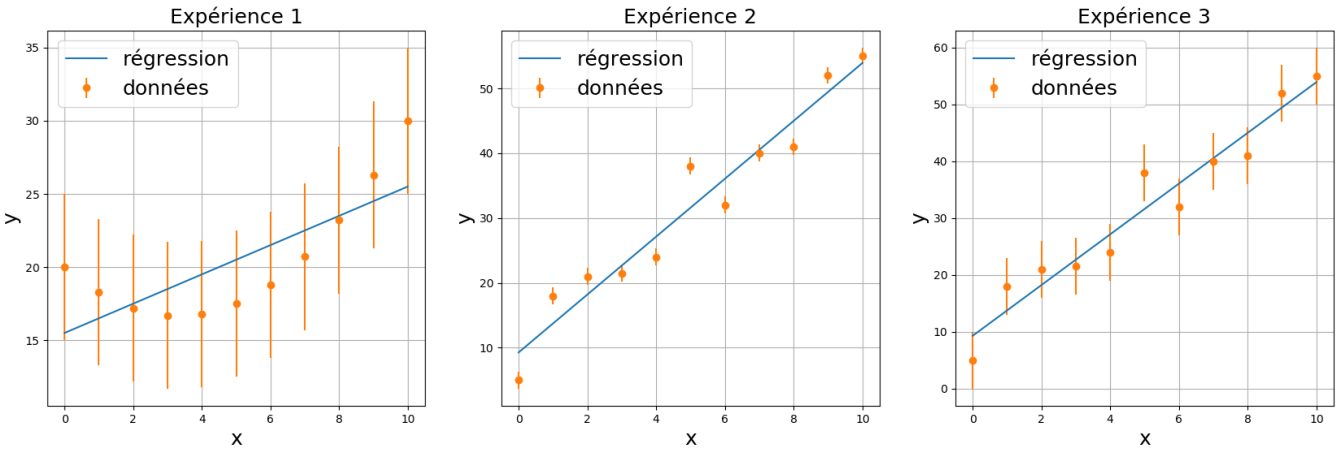
$$y = a\,x + b$$

avec $a$ et $b$ des constantes. Pour déterminer ces constantes, on réalise une série d'expériences avec différentes valeurs pour $x$, et on mesure les valeurs de $y$ correspondantes. En entrant ces données dans un logiciel qui réalise une régression linéaire, celui-ci nous fournit des valeurs pour les paramètres $a$ et $b$ à l'aide de la **méthode des moindres carrées**, c'est-à-dire qu'il cherche les valeurs de $a$ et $b$ qui minimisent l'écart entre une droite affine et les données expérimentales. En Python, on peut utiliser la fonction `(a,b)=np.polyfit(x,y,1)` avec $x$ et $y$ des listes de la bibliothèque `numpy as np`.

## V.2. Validation d'un modèle linéaire

Pour valider un modèle linéaire à l'aide d'une régression linéaire, il est nécessaire de superposer la droite de régression obtenue et les données expérimentales accompagnées de leurs incertitudes-types sur un même graphique afin de les comparer visuellement. Si les données semblent s'aligner avec la droite de régression, et que celle-ci passe globalement par les barres d'incertitudes-types, alors le modèle linéaire est confirmé.

Analysons les régressions linéaires réalisées pour les trois expériences ci-dessous :




- Pour l'expérience 1, les points présentent une certaine courbure et ne s'alignent pas avec la droite de régression, le modèle linéaire n'est pas validé.
- Pour l'expérience 2, la droite de régression ne passe pas par la plupart des barres d'incertitudes-types, le modèle linéaire n'est pas validé.
- Pour l'expérience 3, les points s'alignent avec la droite qui passe globalement par les barres d'incertitudes-types, le modèle linéaire est validé.

## V.3. Linéarisation d'un modèle non-linéaire

Toutes les lois physiques ne sont pas linéaires, mais on peut souvent s'y ramener par des changements de variables. Lorsque c'est le cas, il est alors préférable de réaliser une régression linéaire plutôt qu'une autre modélisation pour confirmer la loi étudiée.

**Application :**

Dans des conditions adiabatiques et en assimilant l'air à un gaz parfait, on peut montrer que la célérité du son évolue avec la température $T$ (en Kelvin) telle que :

$$c = k\sqrt{T}$$

avec $k$ est un coefficient que l'étudiant souhaite déterminer. Pour cela, il réalise des mesures de la célérité des ultrasons à différentes températures :

| T (K) | 270 | 280 | 290 | 300 | 310 | 320 | 330 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_{\text{exp}}$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) | 329 | 334 | 342 | 349 | 351 | 358 | 365 |

L'étudiant suppose que l'incertitude sur la température est négligeable, et il estime que l'incertitude-type sur la mesure de la célérité est $u(c_{\text{exp}}) = 3{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

En utilisant les bibliothèques `numpy as np` et `matplotlib.pyplot as plt`, écrivons un programme Python permettant :

- de réaliser une régression linéaire sur ces données en se ramenant à un modèle linéaire ;
- d'afficher les paramètres $a$ et $b$ obtenus ;
- de superposer sur un même graphique la droite de régression et les mesures accompagnées de leurs barres d'incertitudes-types avec la fonction `plt.errorbar(`$x$`,`$y$`,`$u(y)`,fmt='o')` afin de valider la loi théorique.

On peut se ramener à un modèle linéaire en posant $y = c_{\text{exp}}$ et $x = \sqrt{T}$, et on obtient alors : $a = k$ et $b = 0$.

La régression linéaire donne : $a = 20{,}4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{K}^{-0{,}5}$ et $b = -6{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Comme les points s'alignent avec la droite de régression qui passe par les barres d'incertitudes-types, et que la valeur de $b$ obtenue est proche de zéro, la loi $c = k\sqrt{T}$ est validée.

## V.4. Détermination des incertitudes-types sur les paramètres

La méthode des moindres carrées ne permet pas de fournir les incertitudes-types sur les paramètres $a$ et $b$ de la modélisation. Pour les obtenir, il est possible d'utiliser un algorithme de simulation Monte-Carlo sous la forme suivante :

- on définit un nombre $N$ d'expériences à simuler ;
- on créé deux listes vides qui contiendront les paramètres $a$ et $b$ obtenus lors des expériences ;
- pour chaque expérience $n$ (avec $1 \leqslant n \leqslant N$) :
  - on créé une liste vide qui contiendra les valeurs de $y_{\text{tirage}}$ pour l'expérience
  - on remplit cette liste avec des valeurs aléatoires pour $y_{\text{tirage}}$ qui suivent une loi de probabilité de moyenne $y$ et d'incertitude-type $u(y)$
  - on réalise une régression linéaire sur les listes $x$ et $y_{\text{tirage}}$ afin de calculer les paramètres $a$ et $b$ que l'on enregistre dans les listes précédentes
- on calcule par une étude statique les moyennes $\overline{a}$ et $\overline{b}$ des paramètres contenus dans les listes, et les incertitudes-types $u(a)$ et $u(b)$ sur ces paramètres.

**Application :**

En utilisant la bibliothèque `numpy as np`, écrivons un programme Python permettant :

- de réaliser une simulation Monte-Carlo ($N = 10000$) pour la régression linéaire précédente avec un tirage d'une valeur aléatoire pour chaque mesure qui suit une loi de probabilité gaussienne de moyenne $c_{\text{exp}}$ et d'incertitude-type $u(c_{\text{exp}})$ ;

- de calculer les moyennes des paramètres $a$ et $b$ ;
- de calculer les incertitudes-types sur ces paramètres ;

puis calculons l'écart normalisé avec la valeur tabulée du coefficient $k_{\text{tab}} = 20{,}1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{K}^{-0{,}5}$, afin de conclure sur la compatibilité de l'expérience avec cette valeur tabulée.

On calcule l'écart normalisé :
$E_{\text{N}} = \dfrac{|\overline{a} - k_{\text{tab}}|}{u(a)} \approx \dfrac{|20{,}4 - 20{,}1|}{2{,}0} = 0{,}16 \leqslant 2$, l'expérience est donc compatible avec la valeur tabulée.